

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας 2007

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει
 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Μονάδες 8
- B. α. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Μονάδες 4
 β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι άρτιος αριθμός. Μονάδες 3
- Γ. 1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
 α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αβριστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i . Μονάδες 2
 β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:
 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Μονάδες 2
 γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο. Μονάδες 2
- Γ. 2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:
 $f_1(x) = x^x$, όπου n φυσικός
 $f_2(x) = \ln x$, όπου $x > 0$
 $f_3(x) = \sqrt{x}$, όπου $x > 0$
 $f_4(x) = \sin x$, όπου x πραγματικός. Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2^ο

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.
 α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$. Μονάδες 10
 β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$. Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3^ο

- Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2P(3)=2P(4)=2P(5)$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω: $A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}$, $B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$ όπου x ένας πραγματικός αριθμός.
 α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω, δηλαδή οι $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$. Μονάδες 7
 β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$. Μονάδες 8
 γ. Για $x = -1$ να δεχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$
 και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B)$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

- Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:
 Δείγμα A: 12, 18, t_3 , t_4 , ..., t_{25}
 Δείγμα B: 16, 14, t_3 , t_4 , ..., t_{25}
 Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$.
 α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές \bar{x}_A και \bar{x}_B των δύο δειγμάτων A και B αντίστοιχα είναι $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$. Μονάδες 7
 β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος A και s_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος B, να αποδείξετε ότι $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$. Μονάδες 8
 γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με $CV_A = \frac{1}{15}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος B. Μονάδες 10