

Θεωρία-Τυπολόγιο Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ανάπτυγμα τετραγώνου του αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Παράδειγμα

$$(x^3 + 4y)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot (x^3) \cdot (4y) + (4y)^2 = x^6 + 8x^3y + 16y^2$$

Ανάπτυγμα τετραγώνου της διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Παράδειγμα

$$(2x^2 - 3\beta)^2 = (2x^2)^2 - 2 \cdot (2x^2) \cdot (3\beta) + (3\beta)^2 = 4x^4 - 12x^2\beta + 9\beta^2$$

Διαφορά τετραγώνων

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Παράδειγμα

$$(2x + y^2) \cdot (2x - y^2) = (2x)^2 - (y^2)^2 = 4x^2 - y^4$$

Ανάπτυγμα του κύβου του αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Παράδειγμα

$$(x^2 + 2y)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(2y) + 3(x^2)(2y)^2 + (2y)^3 = x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$$

Ανάπτυγμα του κύβου της διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Παράδειγμα

$$(2y - x^2)^3 = (2y)^3 - 3(2y)^2(x^2) + 3(2y)(x^2)^2 - (x^2)^3 = 8y^3 - 12y^2x^2 + 6yx^4 - x^6$$

Άθροισμα δυο κύβων

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)\end{aligned}$$

Διαφορά δυο κύβων

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}1 - y^3 &= 1^3 - y^3 = (1 - y)(1^2 + 1 \cdot y + y^2) = \\ &= (1 - y)(1 + y + y^2)\end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση

Παραγοντοποίηση ονομάζουμε την διαδικασία κατά την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

1^η ΜΕΘΟΔΟΣ : Κοινός παράγοντας

Παράδ.1:

$$3x^2y^3 - 6xy^3 + 12x^2y^2 = 3xy^2(xy - 2y + 4x)$$

Παράδ.2:

$$4\alpha^3(\beta + 2\alpha) - 3(\beta + 2\alpha)^2 = (\beta + 2\alpha)[4\alpha^3 - 3(\beta + 2\alpha)] = (\beta + 2\alpha)(4\alpha^3 - 3\beta - 6\alpha)$$

2^η ΜΕΘΟΔΟΣ : Ομαδοποίηση

Παράδ.1:

$$\alpha x + \beta y + \alpha\beta + x y = \underbrace{\alpha x + \alpha\beta}_{1\text{η ομάδα}} + \underbrace{\beta y + xy}_{2\text{η ομάδα}} = \alpha(x + \beta) + y(\beta + x) = (x + \beta)(\alpha + y)$$

Παράδ.2:

$$xy^2 + x^2y - 3x - 3y = xy(y + x) - 3(x + y) = (x + y)(xy - 3)$$

3^η ΜΕΘΟΔΟΣ : Διαφορά τετραγώνων

$$\text{Παράδ.1: } 4x^2 - 9y^4 = (2x)^2 - (3y^2)^2 = (2x + 3y^2)(2x - 3y^2)$$

Παράδ.2:

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

4^η ΜΕΘΟΔΟΣ : Ανάπτυγμα τετραγώνου

$$\text{Παράδ.1: } 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4 = (2x)^2 + 2(2x)(3y^2) + (3y^2)^2 = (2x + 3y^2)^2$$

$$\text{Παράδ.1: } 9a^4 - 6a^2 + 1 = (3a^2)^2 - 2(3a^2)1 + 1^2 = (3a^2 - 1)^2$$

5^η ΜΕΘΟΔΟΣ : Τριώνυμο

Επειδή $(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \beta x + \alpha x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Παράδ.1: $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$ Αφού $1 + 7 = 8$, $1 \cdot 7 = 7$

Παράδ.2: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Αφού $(-2) + (-3) = -5$, $(-2) \cdot (-3) = +6$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

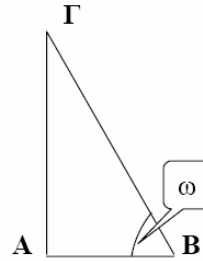
Γενική μορφή: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Τύπος λύσεων: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Εστω το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$)
Για τη γωνία $\hat{B} = \omega$ ορίζουμε τους παρακάτω
τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \frac{ΑΓ}{ΒΓ} & , & & \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{ΑΒ}{ΒΓ} \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{ΑΓ}{ΑΒ} & , & & \sigma\phi\omega &= \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \end{aligned}$$



Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \quad , \quad \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$