Τυπολόγιο Μαθηματικών Γ' Λυκείου

ΑΛΓΕΒΡΑ

Μιγαδικοί αριθμοί

- Αν $\nu = 4\rho + \upsilon$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3$ ισχύουν:

$$i^{\nu} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \ \upsilon = 0 \\ i, & \alpha\nu\ \ \upsilon = 1 \\ -1, & \alpha\nu\ \ \upsilon = 2 \\ -i, & \alpha\nu\ \ \upsilon = 3 \end{cases}$$

- Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ ισχύουν:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha = \gamma \quad \text{και} \quad \beta = \delta \qquad z_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{και} \quad \beta = 0$$

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i \qquad z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ και $z = \alpha - \beta i$ ισχύουν:

$$z + \bar{z} = 2\alpha \qquad z - \bar{z} = 2\beta i$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ ισχύουν:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \qquad z \in I \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ ισχύουν:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \qquad |z| = |\bar{z}| = |-z| \qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$|z^{\nu}| = |z|^{\nu} \qquad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| \cdot$$

- Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:
$|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

- Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:
$|z - z_1| = |z - z_2|$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$

- Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού: $z = \alpha + \beta i = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$

όπου $\rho = |z|$ και θ γωνία με $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha}{\rho}$, $\eta\mu\theta = \frac{\beta}{\rho}$ (ένα όρισμα του z).

- Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$, τότε:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in z$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1 - \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2)]$$

- Αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ είναι μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και ν είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$z^{\nu} = \rho^{\nu}[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta)]$$

- Η εξίσωση $z^{\nu} = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ όπου ν θετικός ακέραιος και $\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού έχει ν διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_{\kappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu}\right), \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$$

Συναρτήσεις

- Έστω οι συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ έχουν πεδίο ορισμού το $A \cap B$ και η $\frac{f}{g}$ το $A \cap B$ εξαιρουμένων των τιμών του x για τις οποίες είναι $g(x) = 0$.

Οι τύποι των παραπάνω συναρτήσεων είναι:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

- Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και συμβολίζουμε με gof τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\} \neq \varnothing$

- Αν μια συνάρτηση f είναι "1-1" τότε αντιστρέφεται, στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$
- $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$
- $\lim\limits_{x \to x_0} ημx = ημx_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} συνx = συνx_0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{συνx - 1}{x} = 0$

Κριτήριο παρεμβολής

- Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύουν:

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$ ••

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$

- Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$

$Q(x) = \beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, $\beta_\kappa \neq 0$, τότε

$\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x - \infty} P(\alpha_\nu x^\nu)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}$

- Αν $\alpha > 1$, τότε

$\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_\alpha x = -\infty$

- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

$\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_\alpha x = +\infty$

Συνέχεια συνάρτησης

- Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $x_0 \in A$. Αν ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ θα λέμε ότι η f είναι συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0.

- Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

➢ Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

➢ $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) = 0$.

- Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

➢ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

➢ $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε για κάθε αριθμό n μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0) = n$

- Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει:

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

- Εύρεση συνόλου τιμών συνεχώς συνάρτησης

1. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = [\alpha, \beta]$

α. Αν $f \uparrow A$ τότε $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$

β. Αν $f \downarrow A$ τότε $f(A) = [f(\beta), f(\alpha)]$

2. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = (\alpha, \beta)$

α. Αν $f \uparrow A$ τότε $f(A) = \left(\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)\right)$

β. Αν $f^{\vee} A$ τότε $f(A) = \left(\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x), \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)\right)$

Παράγωγος συνάρτησης

- Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράγωγοι συναρτήσεων

- $(c)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad (x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1},\ \nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$

  $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0,+\infty)$

  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

  $(e^{x})' = e^{x} \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0$

  $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

  $(\alpha^{x})' = \alpha^{x}\ln\alpha,\quad \alpha > 0,\ x \in \mathbb{R}$

- $\left(f^{\nu}(x)\right)' = \nu f^{\nu-1}(x)\ f'(x)$

  $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$

  $(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x)\ f'(x)$

  $(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x)\ f'(x)$

  $(e^{f(x)})' = e^{f(x)}f'(x)$

  $(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)}f'(x)$

- Θεώρημα μέσης τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β),

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

- Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι

$$f'(\xi) = 0$$

- Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ισχύουν:

- είναι συνεχής στο Δ
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

- Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ ισχύουν:

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να είναι

$$f(x) = g(x) + c$$

Κανόνες de L΄ Hospital

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$

Ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα

- $\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int 0dx = c \qquad \int 1dx = x + c$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \quad x \neq 0$
- $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
- $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$
- $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
- $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$
- $\int \lambda f(x)d(x) = \lambda\int f(x)d(x)$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

- $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

- $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

$u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$
- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

- Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x \in \Delta$$

είναι μια παράγουσα της f στην Δ. Δηλαδή ισχύει

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

- Αν F είναι μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [α, β] τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [\, f(x)g(x)\,]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(\, g(x)\,)g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$

όπου $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, $u_1 = g(\alpha)$ και $u_2 = g(\beta)$

Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Εμβαδό επίπεδου χωρίου

- Έστω f μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x)\,|dx$$

- Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα [α, β]. Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x) - g(x)\,|dx$$